Klausurvorbereitende Übung:

06. März,

$14^{\underline{00}}$

Raum steht im

Netz!

Stetige Verteilungen

Sei X eine stetige Zufallsgröße.

Wertebereich unendlich groß

Nach klassischer Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(X=x) = \frac{1}{|\Omega|} = 0 \; !$$

Es können nur Ereignisse der $x \in B$ berechnen:

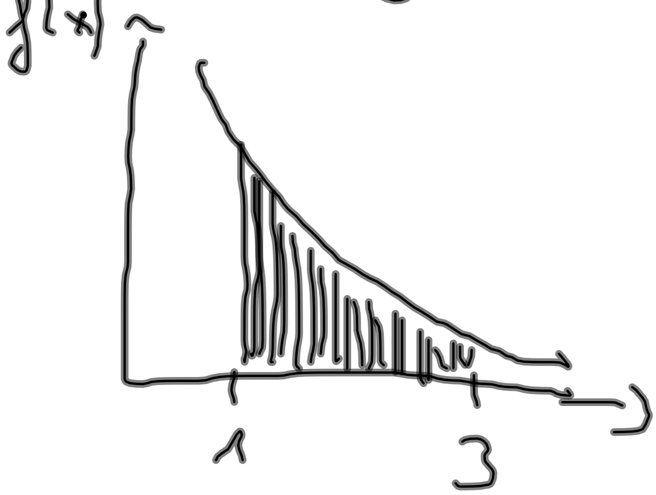
$$P(x \in B)$$

diskret

Einzelwahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X \in \{1,2,3\})$$
$$= \sum_{a_i \in \{1,2,3\}} P(X = a_i)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

stetig



Dichtefunktion

$$P(X \in [1;3])$$
$$= \int_1^3 f(x)\,dx$$

Def.: Wir bezeichnen jede Funktion F(x) mit folgenden Eigenschaften als Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ von X:

1. $\forall \, x \in X$: $\quad 0 \leq F(x) \leq 1$
2. $x_1 \leq x_2 \quad \rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2)$ (F: monoton wachsend)
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. F(x) ist überall stetig

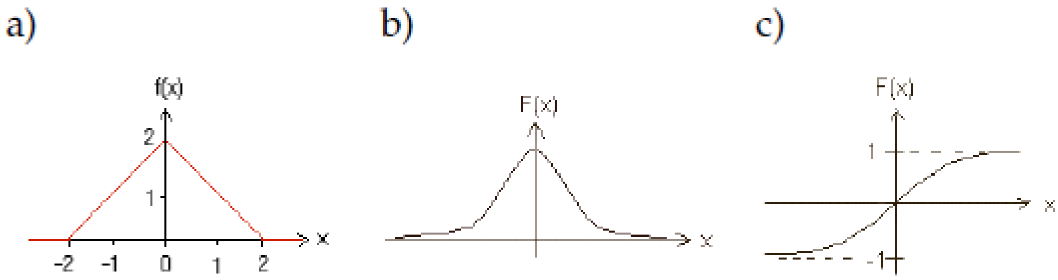
Def.: Die Ableitung $F'(x) = f(x), x \in X$ heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte* (Dichtefunktion) von X.

Es gilt: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Die Dichtefunktion hat folgende Eigenschaften:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Beispiel: Warum sind folgende Funktionen keine (a) Dichte- bzw. (b,c) Verteilungsfunktionen?



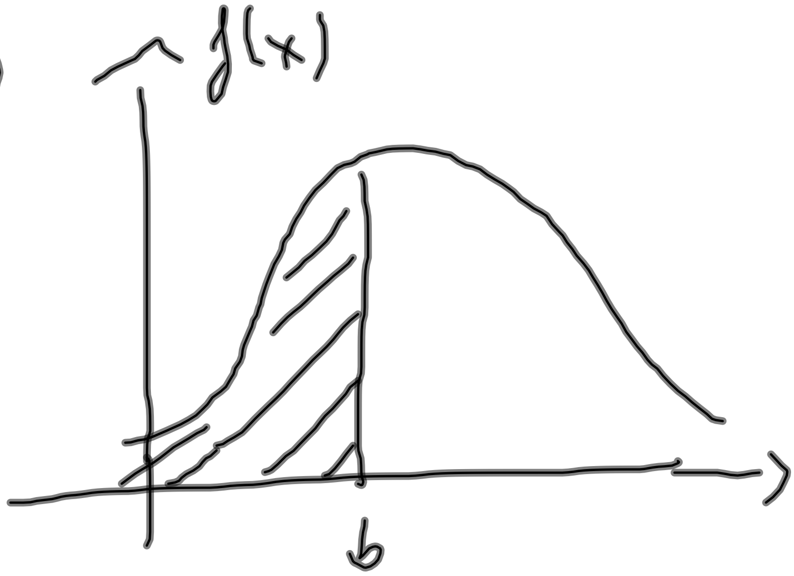
a) keine Dichtefunktion, da die Fläche $= 4 \neq 1$

b) keine Verteilungsfkt., da nicht monoton wachsend

c) da $F(x) < 0$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

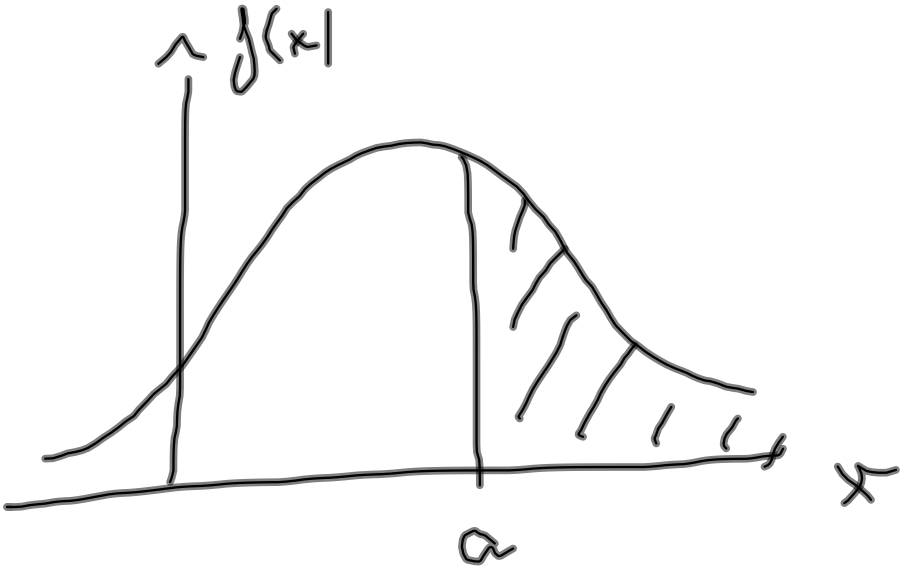
1) $P(X \leq b)$



$= F(b)$

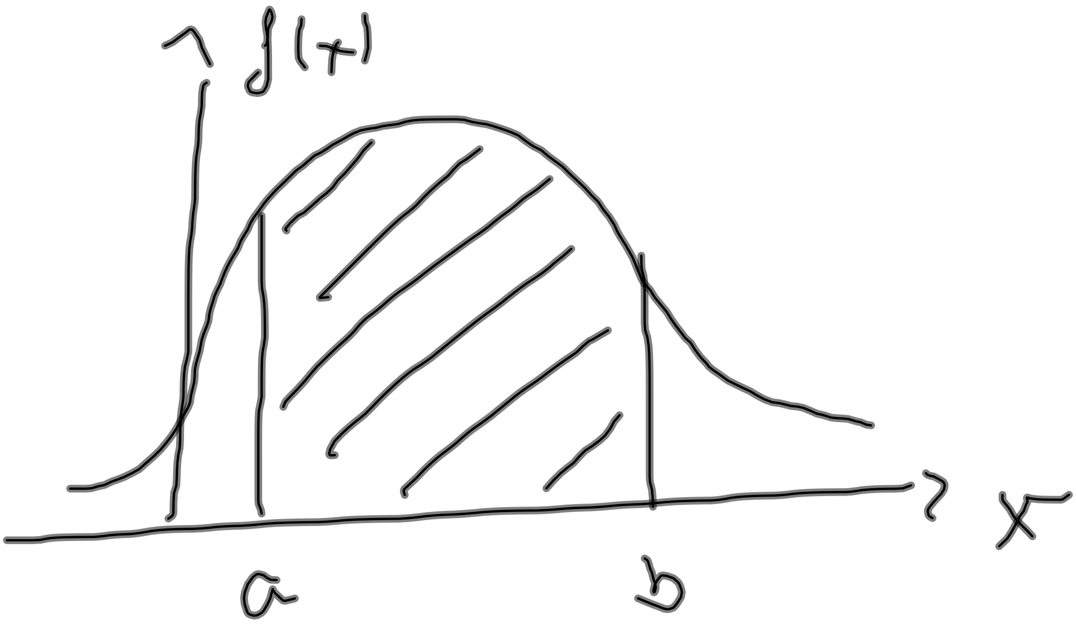
$= \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$

2) $P(X \geq a) = 1 - F(a)$



$$= 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

3) $P(a \leq X \leq b)$



$= F(b) - F(a)$

$= \int_a^b f(x)\,dx$

4) $P(X = a) = 0$

5) $P(X \leq a) = P(X < a)$

$P(X \geq a) = P(X > a)$

Beispiel: Sei X die Verspätung der U-Bahn an einer bestimmten Haltestelle. X besitze folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}125x \text{ für } 0 \le x \le 4 \\ 0 \text{ für } x \notin [0{,}4] \end{cases}$$

Gesucht:

a) Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Verspätung zwischen 1 und 2 Minuten liegt.

$$P(1 \le X \le 2)$$

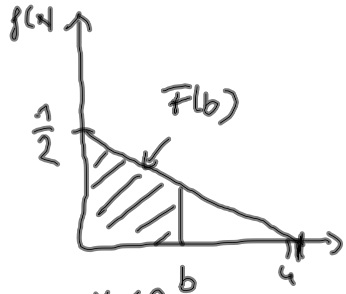
$$= \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 (0.5 - 0{,}125\,x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2\right]_1^2$$

$$= \frac{12}{16} - \frac{7}{16} = \underline{\underline{0{,}312}}$$

b) Verteilungsfunktion



$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \int_0^x (0{,}5 - 0{,}125t)\,dt & 0 \le x \le 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 & , 0 \le x \le 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

c) Wahrscheinlichkeit, dass
i) die Verspätung geringer als 3 Minuten
ii) die Verspätung mehr als 2 Minuten
iii) die Verspätung zwischen 3 und 4 Minuten
beträgt.
iv) die Verspätung mehr als 2 Minuten beträgt, falls die U-Bahn bereits 1 Minute zu spät ist.

i) $P(X < 3) = F(3)$

$= \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{16} \cdot 3^2$

ii) $P(X > 2) = 1 - F(2)$

$= 1 - \left[\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{16} \cdot 2^2\right]$

iii) $P(3 \le X \le 4) = F(4) - F(3)$

$= \left[\frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{16} \cdot 4^2\right] - \left[\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{16} \cdot 3^2\right]$

iv) $P(X > 2 \mid X \ge 1)$

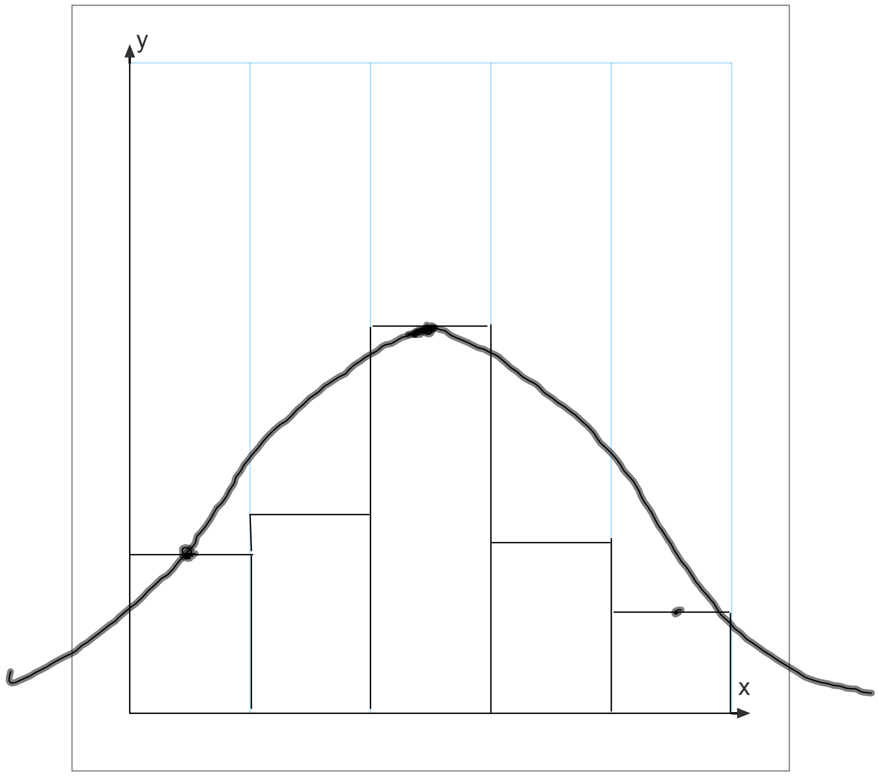
$$= \frac{P(X > 2 \cap X \ge 1)}{P(X \ge 1)}$$

$$= \frac{P(X > 2)}{P(X \ge 1)} = \frac{1 - F(2)}{1 - F(1)}$$

Wo kommen die Dichtefunktionen her?

-> Stichprobe -> Klasseneinteilung und Histogramm

z.B: X ist die Körpergröße der Studierenden im Master M

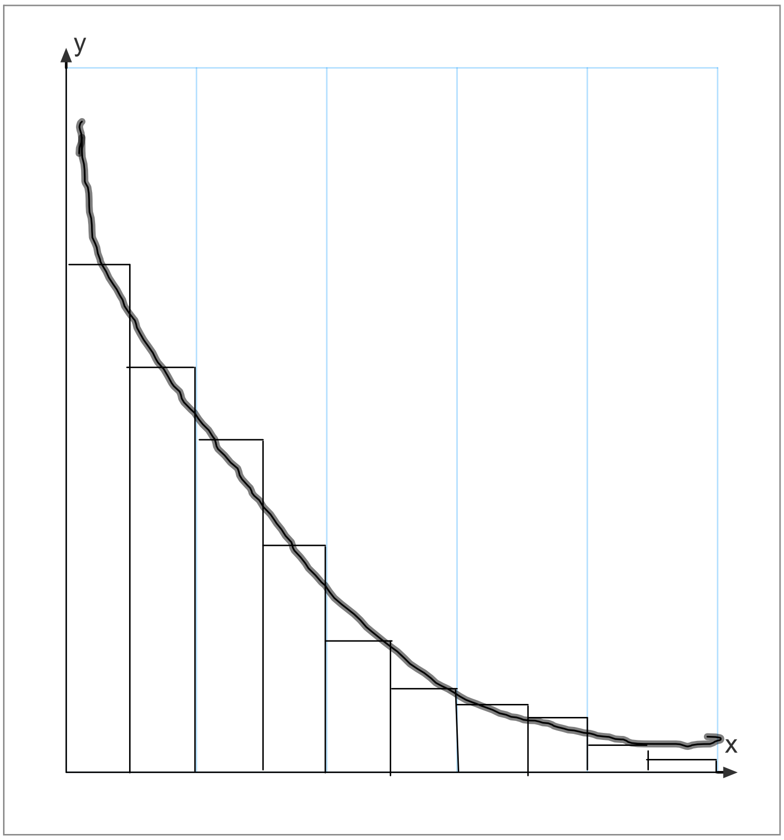


Gaußfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

-> Parameter μ, σ

z.B: X ist die Lebensdauer von Maschinen



-> Schätzen einer passenden Funktion aus Histogramm

$\xrightarrow[\Delta K_i \to 0]{n \to \infty}$ Exponentialfkt.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Parameter: α

	Weisen Sie nach, daß die Fläche unter der Funktion $f(x)=\begin{cases}\beta e^{-\alpha x}, x\geq 0\\ 0\;, x<0\end{cases}$ $\alpha>0,\beta>0$ nur dann gleich 1 ist, wenn gilt: $\alpha=\beta$!

Fläche unter der Dichte-funktion = 1.

$$\int_0^\infty \beta\cdot e^{-\alpha x}\,dx$$

$$=\left[-\frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^\infty$$

$$=0-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\cdot e^{0}\right)$$

$$=\frac{\beta}{\alpha}=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta$$

Parameter stetiger Verteilungen

Erwartungswert und Varianz

diskret

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

stetig

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Def.: Sei X eine stetige Zufallsgröße. Dann heißen $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$ Erwartungswert von X

und $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x)dx$ Varianz von X.

Beispiel: Sei X die Verspätung der U-Bahn an einer bestimmten Haltestelle. X besitze folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}125x \text{ für } 0 \le x \le 4 \\ 0 \text{ für } x \notin [0{,}4] \end{cases}$$

Gesucht: Erwartete Verspätung der U-Bahn.

$$E(x) = \int_0^4 x \cdot (0{,}5 - 0{,}125x)\,dx$$

$$= \int_0^4 (0{,}5x - 0{,}125x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3\right]_0^4$$

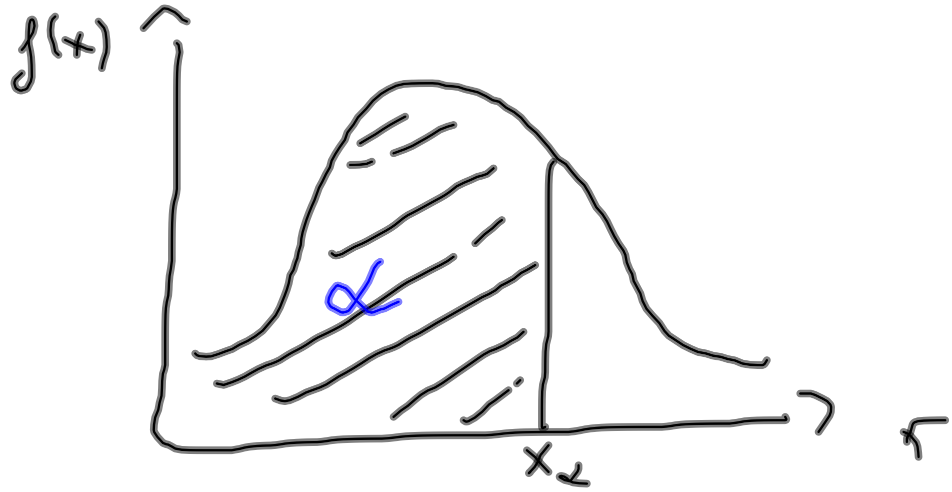
$$= \frac{4}{3} \approx 1 \text{ min } 20 \text{ sek}$$

$$E(x^2) = \int_0^4 x^2 \cdot (0{,}5 - 0{,}125x)\,dx$$

<u>Quantile</u>

Def.: Sei X eine stetige Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion F(x) und Verteilungsdichte f(x).

Der Wert $x_\alpha \in X$, für den gilt: $F(x_\alpha) = \alpha$ bzw. $\int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)dx = P(X \leq x_\alpha) = \alpha$ heißt *(unteres)* *α–Quantil.*



Gesucht: Verspätung, die 75% der U-Bahnen nicht überschreiten.

$$P(X \leq x_{0,75}) = 75\,\%$$

$$F(x_{0,75}) = 0,75$$

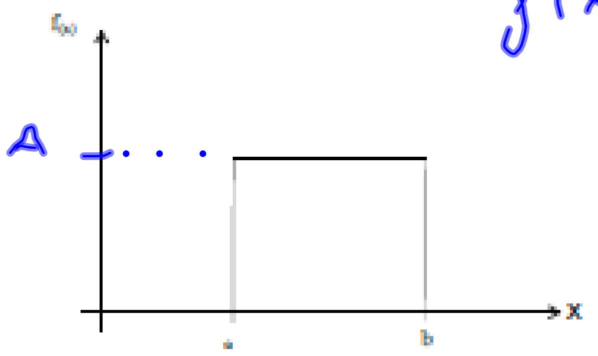
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{16} \cdot x^2 = 0,75$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x_{0,75} = 6} \vee \underline{x_{0,75} = 2}$$

Besondere Verteilungen

1) Stetige Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} A & a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$1) \int_a^b A\,dx = [Ax]_a^b$$

$$= Ab - Aa \overset{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{b-a}$$

Def.: Sei X stetig. X heißt *auf dem Intervall* $[a,b] \subseteq \Re$ *gleichverteilt*, falls X die Dichtefunktion

$$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a;b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

besitzt.

Bezeichnung: $X \sim R[a;b]$

X ist gleichverteilt im Intervall $[a;b]$

Es gilt:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a;b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \frac{1}{2}(b+a)$$

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2\cdot f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

2) Exponentialverteilung

Def.: Sei X stetig. X heißt *exponentialverteilt mit dem Paramater* α, falls die Dichtefunktion die Gestalt

$$f_{(x)} = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

besitzt.

Bezeichnung: $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$

α = Intensitätsparameter

→ Geschwindigkeit des Abklingens gegen 0

Typische Anwendungsgebiete:

- X – zufällige Lebensdauer von Bauelementen
- X – zufällige Gesprächsdauer von Telefonaten
- X – zufälliger Zeitabstand zwischen 2 Signalen (‚die in einer Empfangsstation eintreffen)
- X - zufälliger Zeitabstand zwischen 2 Kunden (‚ die in einem Supermarkt eintreffen)
- X – Abbauzeit von Drogen im menschlichen Blut

Satz: Es gilt:

a) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$

b) $\mathrm{EX}=\frac{1}{\alpha}$

c) $\mathrm{Var}(\mathrm{X})=\frac{1}{\alpha^2}$

Beweis: Zu a)

$$F(x)=\int_0^x \alpha\cdot e^{-\alpha t}\,dt$$

$$=\left[-e^{-\alpha\cdot t}\right]_0^x=$$

$$-e^{-\alpha\cdot x}-\left(-e^{0}\right)=1-e^{-\alpha\cdot x}$$

✎	Weisen Sie die Aussagen b) und c) des Satzes nach!

Beispiel

Die zufällige Lebensdauer von Kühlschränken sei exponentialverteilt. Im Mittel beträgt sie 10 Jahre:
a) Wieviel % aller Kühlschränke werden diese 10 Jahre überschreiten?
b) Nach welcher Zeit haben 80% aller Kühlschränke 'ihr Leben ausgehaucht'?

$$E(X) = 10 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 10$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) $P(X > 10) = 1 - F(10)$

$$= 1 - \left[1 - e^{-0{,}1 \cdot 10}\right] = \frac{1}{e}$$

b) 80 % - Quantil

$$P(X \leq t) = 80\,\%$$

$$F(t) = 0{,}8$$

$$1 - e^{-0{,}1t} = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow t \approx 16{,}1 \text{ Jahr}$$

3) Die Normalverteilung

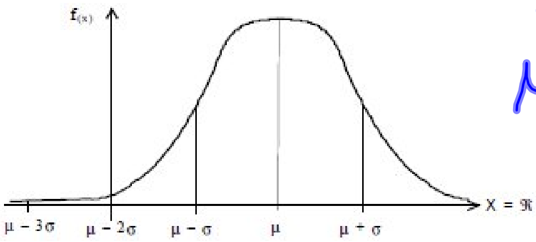
Eine für die Theorie und Anwendungen sehr wichtige stetige Verteilung ist die *Normalverteilung*. Normalverteilungen treten als Modelle treten als Modelle für Körpergrößen, Geburtsgewichte, Messfehler, Niederschlagsmengen, landwirtschaftliche Erträge usw. auf. In der Theorie erscheinen Normalverteilungen als Näherungen für andere (auch diskrete) Verteilungen

Def.: X sei stetig. X heißt *normalverteilt mit den Parametern* (μ, σ^2), falls die Dichtefunktion f(x) folgende Gestalt besitzt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Bezeichnung: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

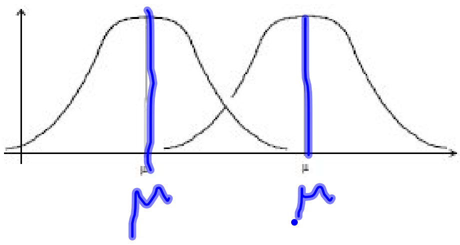
Das Bild der Dichtefunktion ist die sogenannte *Gaussche Glockenkurve.*



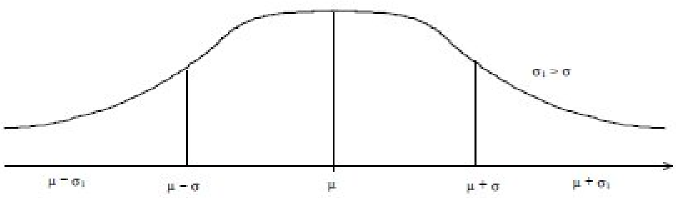
symmetrisch

$\mu - \sigma = \mu + \sigma$

μ - Lageparameter



σ - Streuungsparameter



Satz: Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt: $EX = \mu$ $\quad Var(X) = \sigma^2$

Bestimmung der Parameter: Momentenmethode

Vorgehen: oft gibt es einen Zusammenhang zwischen $E(X)$ und $Var(X)$ und den Parametern.

z.B. Exponentialfkt:

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

Erwartungswert und Varianz können als $\bar{x}$ und s^2 aus der Stichprobe abgeschätzt werden: $E(X) = \bar{x} = \frac{1}{\alpha}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\bar{x}}$$